Zur

# Theorie der Spiralflächen.

---

## Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

**hohen philosophischen Facultät der Universität Rostock**

vorgelegt

von

**Franz Ebner**

aus Rostock.

---

**Greifswald.**

Druck von F. W. Kunike.

1895

Referent: Prof. Dr Staude.

# Zur Theorie der Spiralflächen.

Von

Dr. **Ebner**, Schulamtscandidat

in Rostock.

## Einleitung.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zu der Discussion gewisser Flächen enthalten, welche bisher wenig im Zusammenhang untersucht worden sind. In die Betrachtung eingeführt sind diese Flächen zuerst von Herrn Sophus Lie, der sich seit 1871 mit gewissen Curven auf ihnen beschäftigte und ihnen gelegentlich 1878 den Namen „Spiralflächen" erteilte [1]; Herr Lie fand auch den Zusammenhang dieser Flächen mit einer gewissen conformen und linearen Transformation des Raumes [2]. Von einem anderen Gesichtspunkte aus wurde 1878 Herr M. Lévy auf diese Flächen geführt, als er versuchte, das bekannte Theorem von Bour für die Schraubenflächen weiter zu verallgemeinern [3]; er gab zugleich eine kinematische Erzeugung der Spiralflächen und bestimmte die Form ihres Linienelements. Seine Ergebnisse wurden dann von Herrn

1) Vgl. Lie und Klein, Mathem. Ann. Bd. IV, p. 50 ff.; Lie, Math. Ann. Bd. V, p. 204; Bd. XX, p. 357 ff.

2) Vgl. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen etc., bearb. und hersg. von Scheffers, p. 260,

3) Vgl. Lévy, Sur le développement des surfaces, dont l'élement linéaire est exprimable par une fonction homogène, Compt. rend. 1878, p. 789 ff. der Note vom 18. November.

Darboux auf eine elegantere Form gebracht [1]). Auf mehr mechanischem Wege kam in neuerer Zeit Herr Staude auf die Spiralflächen, indem er sich die Aufgabe stellte, gewisse Betrachtungen Lie's über geodätische Linien zu verallgemeinern und zu untersuchen, wann die Bahncurven eines bewegten Punktes auf einer Fläche eine infinitesimale Transformation gestatten [2]).

Die vorliegende Arbeit selbst ist in drei Abschnitte geteilt. Der erste giebt die Einführung der Spiralflächen als die invarianten Flächen der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes (§ 1—7). Der zweite Abschnitt entwickelt alsdann allgemeine Eigenschaften der Spiralflächen, speciell die Form ihres Linienelements (§ 8—11). Der dritte Abschnitt deckt schliesslich die Beziehung dieser Flächen zu dem Problem der Bewegung eines Punktes auf Oberflächen unter Einfluss einer Kräftefunction auf (§ 12 — Ende).

Zum Schluss erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Staude, der mich zu dieser Arbeit angeregt hat, für das Interesse, welches er derselben im weiteren Verlauf zu Teil werden liess, auch an dieser Stelle meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

---

1) Vgl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. I, p. 197 ff,

2) Vgl. Staude, Berichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, 1893, p. 429 ff. vom 18. Octbr.

# Erster Abschnitt.

## Einführung der Spiralflächen durch die conforme projective infinitesimale Transformation des Raumes.

### § 1

*Die projective Transformation des Raumes.*

Die allgemeine projective Transformation des Raumes wird bekanntlich dargestellt durch die Gleichungen [1]):

1)
$$x_1 = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

$$y_1 = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

$$z_1 = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

unter $a_{ik}$ $(i, k = 1, 2, . 4)$ gegebene Constanten, unter $(xyz)$ die Cartesischen Coordinaten eines Raumpunktes, unter $(x_1y_1z_1)$ diejenigen eines Bildpunktes verstanden.

Die Gleichungen 1) repräsentiren eine ganze Schar von Transformationen, wenn man unter den $a_{ik}$ irgend welche willkürliche Grössen versteht; diese Transformationsschar ist 15-gliederig, da unter den 16 Grössen $a_{ik}$ nur 15 wesentlich sind [1]).

Die Schar 1) stellt zugleich eine Gruppe von Transformationen dar, d. h. zwei auf einander folgende Transformationen der Schar sind mit einer einzigen Transformation aequivalent, welche bereits in der Schar enthalten ist [2]).

Denn bezeichnet kurz $Ta_{ik}$ diejenige Transformation, die den Punkt $(xyz)$ in $(x_1y_1z_1)$, $Ta_{ik}'$ diejenige Transformation, welche weiter $(x_1y_1z_1)$ in $(x_2y_2z_2)$ überführt, so kann man beide Transformationen, nach einander angewandt, ersetzen durch die eine Transformation $Ta_{ik}''$; welche direct $(xyz)$ in $(x_2y_2z_2)$ überführt, und für welche $a_i{}^{k''}$ als Function von $a_{ik}$ und $a_{ik}'$ gegeben ist durch die Gleichung:

2)
$$a_{ik}'' = \sum_1^4 {}_h a_{ih}' \,.\, a_{hk}, \quad (i, k = 1, . \;.\;. 4)$$

---

1) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I. Absch. p. 554.

2) Vgl. Lie, l. c. I, p. 3.

diese Transformation $Ta_{ik}''$ ist aber bereits in der Schar 1) enthalten.

In der Schar 1) ist auch die sogen. identische Transformation enthalten, welche den Punkt $(xyz)$ in sich selbst überführt [1]). Für diese wird:

$$3) \qquad a_{ii} = 1, \quad a_{ik} = 0 \quad (i\,k = 1, \ldots 4)$$

Setzt man demnach

$$4) \qquad a_{ii} = 1 + \delta a_{ii}, \quad a_{ik} = \delta a_{ik}$$

so erhält man aus 1) die sogen. infinitesimale Transformation des Raumes, welche $(xyz)$ in den ihm unendlich benachbarten Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ überführt, unter $\delta a_{ii}$, $\delta a_{ik}$ dabei unendlich kleine Grössen 1. Ordnung verstanden.

Bis auf unendlich kleine Grössen 2ter und höherer Ordnung ist also [2]):

$$5) \qquad \frac{1}{\delta a_{41} x + \delta a_{42} y + \delta a_{43} z + (1 + \delta a_{44})} = 1 - \delta a_{41} x - \delta a_{42} y - \delta a_{43} z - \delta a_{44}$$

Gemäss 4) und 5) werden damit die Gleichungen 2) unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen 2ter und höherer Ordnung:

$$6) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + (\delta a_{11} - \delta a_{44}) x + \delta a_{12} y + \delta a_{13} z \\ &\quad - \delta a_{41} x^2 - \delta a_{42} xy - \delta a_{43} xz + \delta a_{14} \\ y_1 &= y + \delta a_{22} x + (\delta a_{22} - \delta a_{44}) y + \delta a_{23} z \\ &\quad - \delta a_{42} y^2 - \delta a_{43} yz - \delta a_{41} yx + \delta a_{24} \\ z_1 &= z + \delta a_{31} x + \delta a_{32} y + (\delta a_{33} - \delta a_{44}) z \\ &\quad - \delta a_{43} z^2 - \delta a_{41} zx - \delta a_{42} xy + \delta a_{34} \end{aligned}$$

Die bisher noch willkürlichen Grössen $a_{ik}$ seien nun als reelle Functionen eines Parameters $t$ vorausgesetzt, dessen Wert $t_0$ der identischen Transformation entsprechen möge, dann kann man setzen:

$$7) \qquad \delta a_{11} - \delta a_{44} = \left[\frac{d(a_{11} - a_{44})}{dt}\right]_{t=t_0} \cdot \delta t = \text{const.}\, \delta t = a_1 \delta t$$
$$\delta a_{12} = a_2 \delta t, \quad \delta a_{13} = a_3 \delta t, \quad \delta a_{14} = a\, dt$$

---

1) Vgl. Lie, l, c. I, p. 554, § 134.

2) Vgl. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen etc., bearb. und hersg. von Scheffers p. 76, wo zu dem Obigen analoge Betrachtungen für die Ebene angestellt sind.

$$\delta a_{21} = b_1\delta t, \quad \delta a_{22} - \delta a_{44} = b_2\delta t, \quad \delta a_{23} = b_3\delta t, \quad \delta a_{24} = \delta bt$$
$$\delta a_{31} = c_1\delta t, \quad \delta a_{32} = c_2\delta t, \quad \delta a_{33} - \delta a_{44} = c_3\delta t, \quad \delta a_{34} = c\delta t$$
$$-\delta a_{41} = a_{11}\delta t, \quad -\delta a_{42} = a_{22}\delta t, \quad -\delta a_{43} = a_{33}\delta t$$

wo die neuen Grössen $a, b, c, a_1, \ldots a_{11}, a_{22}, a_{33}$ nunmehr bestimmte Constanten bezeichnen.

Setzt man noch zur Abkürzung:

8)
$$\xi = a + a_1x + a_2y + a_3z + a_{11}x^2 + a_{22}xy + a_{33}xz$$
$$\eta = b + b_1x + b_2y + b_3z + a_{11}xy + a_{22}y^2 + a_{33}yz$$
$$\zeta = c + c_1x + c_2y + c_3z + a_{11}xz + a_{22}zy + a_{33}z^2$$

so erhält man aus 6) und 7) als Gleichungen der projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes:

9)
$$x_1 - x = \delta x = \xi\,\delta t$$
$$y_1 - y = \delta y = \eta\,\delta t$$
$$z_1 - z = \delta z = \zeta\,\delta t$$

die wir kurz durch das Symbol repräsentiren [1]):

10)
$$Tf = \xi(xyz)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xyz)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(xyz)\frac{\partial f}{\partial z}$$

Interpretirt man $\delta t$ als das Zeitelement $dt$, so kann man die infinitesimale Transformation 10) als die Definition einer stationären Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit auffassen, vermöge welcher das zur Zeit $t = t$ an der Stelle $(xyz)$ des Raumes befindliche Teilchen eine Geschwindigkeit besitzt, deren Componenten die Werte $\xi\eta\zeta$ in 8) sind.

## § 2.

*Die conforme projective infinitesimale Transformation des Raumes.*

Es sollen nunmehr die Bedingungen für die Conformität der projectiven infinitesimalen Transformation $Tf$ des § 1. aufgestellt werden.

Sind in einem Raum von drei Dimensionen $u, v, w$ die Coordinaten eines Punktes, so wird das Quadrat des Linienelements in diesen Coordinaten:

---

1) Vgl. Lie, l. c. I, p. 54.

1) $$ds^2 = E\,du^2 + F\,dv^2 + G\,dw^2 + 2L\,dv\,dw + 2M\,dw\,du + 2N\,du\,dv$$

wo die $E$, $F$, $G$, $L$, $M$, $N$ Functionen der drei Variabelen $u$, $v$, $w$ sind. Soll dieser Raum nun eine Transformation in sich selbst von der Form:

2) $$u_1 = \varphi(uvw), \quad v_1 = \psi(uvw), \quad w_1 = \chi(uvw)$$

gestatten, so lauten die Bedingungen für die Conformität dieser Transformation [1]):

3) $$E(\varphi\psi\chi)\cdot\varphi_1^2 + F(\varphi\psi\chi)\cdot\psi_1^2 + G(\varphi\psi\chi)\times x_1^2 + 2L(\varphi\psi\chi)\psi_1\chi_1 + 2M(\varphi\psi\chi)\cdot\chi_1\varphi_1 + 2N(\varphi\psi\chi)\cdot\varphi_1\psi_1 = m^2E(uvw)$$

$$E\varphi_2^2 + F\psi_2^2 + G\chi_2^2 + 2L\,\psi_2\chi_2 + 2M\,\chi_2\varphi_2 + 2N\,\varphi_2\psi_2 = m^2\cdot F$$

$$E\varphi_3^2 + F\psi_3^2 + H\chi_3^2 + 2L\,\psi_3\chi_3 + 2M\,\chi_3\varphi_3 + 2N\,\varphi_3\psi_3 = m^2\cdot G$$

und:

3′) $$E\varphi_2\varphi_3 + F\varphi_2\psi_3 + G\chi_2\chi_3 + L(\psi_2\chi_3 + \psi_3\chi_2) + M(\chi_2\varphi_3 + \chi_3\varphi_2) + N(\varphi_2\psi_3 + \varphi_3\psi_2) = m^2L$$

$$E\varphi_3\varphi_1 + F\psi_3\psi_1 + G\chi_3\chi_1 + L(\psi_3\chi_1 + \psi_1\chi_3) + M(\chi_3\varphi_1 + \chi_1\varphi_3) + N(\varphi_3\psi_1 + \varphi_1\psi_3) = m^2M$$

$$E\varphi_1\varphi_2 + F\psi_1\psi_2 + G\chi_1\chi_2 + L(\psi_1\chi_2 + \psi_2\chi_1) + M(\chi_1\varphi_2 + \chi_2\varphi_1) + N(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1) = m^2N$$

Hierin sind die $E$, $F$, $G$, $M$, $N$ der linken Seiten Functionen der Functionen $\varphi\psi\chi$, diejenigen der rechten Seiten Functionen von $u$, $v$, $w$; die unteren Indices 1, 2, 3 bedeuten die partielle Differentiation nach $u$, $v$, $w$; $m^2$ bezeichnet einen Proportionalitätsfactor, der eine Function von $u$, $v$, $w$ ist und für die identische Transformation des Linienelements 1) gleich 1 wird.

Wählt man im Besonderen die Functionen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ in 2) nun so, dass:

4) $$u_1 = u + \xi(uvw)\,\delta t$$
$$v^1 = v + \eta(uvw)\,\delta t$$
$$w_1 = w + \zeta(uvw)\,\delta t$$

---

1) Vgl. Knoblauch. Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, § 27.

und berücksichtigt man dann die für jede eindeutige und stetige Function $f$ bis auf Glieder 1ter Ordnung giltige Entwicklung:

5) $$f(u_1 v_1 w_1) = f(uvw) + (f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta)\,\delta t$$

wo die unteren Indices die partielle Differentiation nach $u$, $v$, $w$ bedeuten, so erhält man, da:

6) $$m^2(uvw) = 1 + \mu(uvw)\,\delta t$$

gesetzt werden kann, aus 3) und 3′) als Bedingungen für die Conformität der infinitesimalen Transformation 4):

7) $$\begin{aligned}(E_1\xi + E_2\eta + E_3\zeta) + 2E\xi_1 + 2M\zeta_1 + 2N\eta_1 &= \mu E\\ (F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta) + 2F\eta_2 + 2N\xi_2 + 2L\zeta_2 &= \mu F\\ (G_1\xi + G_2\eta + G_3\zeta) + 2G\zeta_3 + 2L\eta_3 + 2M\xi_3 &= \mu G\end{aligned}$$

und:

7′) $$\begin{aligned}L_1\xi + L_2\eta + L_3\zeta + L(\eta_2 + \eta_3) + F\eta_3 + G\zeta_1 + M\xi_2 + N\xi_3 &= \mu L\\ M_1\xi + M_2\eta + M_3\zeta + M(\zeta_3 + \zeta_1) + G\zeta_1 + E\xi_2 + N\eta_3 + L\eta_1 &= \mu M\\ N_1\xi + N_2\eta + N_3\zeta + N(\xi_1 + \xi_2) + E\xi_2 + F\eta_1 + L\zeta_1 + M\zeta_2 &= \mu N\end{aligned}$$

Für unseren Fall des gewöhnlichen Raumes ist nun:

8) $$u = x,\quad v = y,\quad w = z$$
$$E = F = G = 1,\quad L = M = N = 0$$

so dass die Gleichungen 7) und 7′) werden:

9) $$2\xi_1 = \mu,\quad 2\eta_2 = \mu,\quad 2\zeta_3 = \mu$$
$$\eta_1 + \zeta_2 = 0,\quad \zeta_1 + \xi_3 = 0,\quad \xi_2 + \eta_1 = 0$$

oder $\mu$ eliminirt:

10) $$\xi_1 - \eta_2 = 0;\quad \eta_2 - \zeta_3 = 0,\quad \zeta_3 - \xi_1 = 0$$
$$\eta_3 + \xi_2 = 0\quad \zeta_1 + \xi_3 = 0,\quad \xi_2 + \eta_1 = 0$$

Bildet man diese Gleichungen nun für die Werte 8) in § 1. von $\xi\eta\zeta$, so erhält man für die Constanten daselbst die Bedingungen:

11) $$\begin{aligned}a_1 = b_2\quad a_2 = -b_1,\quad a_{11} &= 0\\ b_2 = c_3,\quad b_3 = -c_2,\quad a_{22} &= 0\\ c_3 = a_1,\quad c_1 = -a_3,\quad a_{33} &= 0\end{aligned}$$

Setzt man noch für das Folgende:

12) $$a_1 = k,\quad a_2 = -u,\quad a_3 = m.\quad b_3 = -l$$

so wird das Symbol der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes:

13) $$Tf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

wo $\xi\eta\zeta$ die Werte haben:

13′) $$\begin{aligned} \xi &= a + kx - ny + mz \\ \eta &= b + nx + ky - lz \\ \zeta &= c - mx + ly + kz \end{aligned}$$

Setzt man von den 7 Constanten $a$, $b$, $c$, $k$, l, $m$, $n$ successive die eine gleich 1, die übrigen gleich 0, so erhält man aus 13′) die infinitesimale Transformation der Translation nach der $x$-, $y$-, $z$-Axe, der Aehnlichkeit in Bezug auf den Ursprung und der Rotation um die $x$-, $y$- und $z$-Axe [1]).

Die allgemeine conforme projective infinitesimale Transformation des Raumes ist also linear mit Constanten aus diesen 7 besonderen infinitesimalen Transformationen zusammengesetzt.

## § 3.

*Die invarianten Punkte der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes.*

Um zu untersuchen, ob irgend welche Raumpunkte bei Anwendung unserer Transformation in sich übergehen, für die Transformation also einzeln invariant bleiben, hat man das Gleichungssystem zu bilden [2]):

1) $$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

wo $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Werte 13′) des § 2 haben. Unter der Voraussetzung, dass die Determinante des Systems 1):

2) $$\begin{vmatrix} k & -n & m \\ n & k & -l \\ -m & l & k \end{vmatrix} = k(k^2 + l^2 + m^2 + n^2)$$

nicht verschwindet, was erfordert, dass $k \gtrless 0$ ist, wird dem System 1) allein genügt durch den Punkt:

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. Beispiele zu Cap. XI und XII, sowie p. 81, Z. 2 v. u.

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. l. p. 241, § 3.

$$3) \quad x = x_0 = \frac{-a(k^2+l^2)+k(cm-bn)-l(cn+bm)}{k(k^2+l^2+m^2+n^2)}$$

$$y = y_0 = \frac{-b(k^2+m^2)+k(an-cl)-m(al+cn)}{k(k^2+l^2+m^2+n^2)}$$

$$z = z_0 = \frac{-c(k^2+n^2)+k(bl-am)-n(bm+al)}{k(k^2+l^2+m^2+n^2)}$$

Unter der Voraussetzung $k = 0$ kann man folglich den einzigen invarianten Punkt 3) zum Anfangspunkt 0 eines neuen Coordinatensystems $(0'x'y'z')$ wählen, dessen Axen denen des ursprünglichen Systems $(0xyz)$ parallel sind. Das Symbol der infinitesimalen Transformation sei in den neuen Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$:

$$4) \quad Tf = \xi' \frac{\partial f}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial f}{\partial z'}$$

Dann ist [1]):

$$5) \quad \begin{aligned} \xi' &= Tx' = a+k(x_0+x')-n(y_0+y')+m(z_0+z') \\ \eta' &= Ty' = b+n(x_0+x')+k(y_0+y')-l(z_0+z') \\ \zeta' &= Tz' = c-m(x_0+x')+l(y_0+y')+k(z_0+z') \end{aligned}$$

oder da $(x_0y_0z_0$ so gewählt ist, dass er den Gleichungen 1) genügt, so wird in 6) unter nachträglicher Weglassung der Accente

$$6) \quad \begin{aligned} \xi &= kx-ny+mz \\ \eta &= nx+ky-lz \\ \zeta &= -mx+ly+kz \end{aligned}$$

Ist dagegen $k = 0$, so erfordert das Zugleichbestehen der Gleichungen 1) für die Constanten die Bedingung:

$$7) \quad al+bm+cn = 0$$

in diesem Falle sind alle Punkte der Geraden:

$$8) \quad x+\frac{b}{n} : y-\frac{a}{n} : z = l : m : n$$

einzeln invariant, und die Transformation $Tf$ in § 2., 13) hat die Form:

$$9) \quad \begin{aligned} \xi &= a-ny+mz \\ \eta &= b-lz+nx \\ \zeta &= c-mx+ly \end{aligned}$$

---

1) Vgl. Lie, l. c. I, p. 56, § 14.

Interpretirt man $\xi\eta\zeta$ wieder als Geschwindigkeitscomponenten eines Raumpunktes $(xyz)$ zur Zeit $t$, so involviren die Gleichungen 6) eine Bewegung des Raumes, bei welcher bezüglich $\xi\eta\zeta$ Resultanten von zwei verschiedenen Geschwindigkeiten sind: einer mit den Componenten:

10) $$kx, \quad ky, \quad kz$$

welche in die Richtung des Radiusvector fällt und vermöge welcher der Raum in Bezug auf den Ursprung in dem constanten Verhältniss $k$ dilatirt wird, und einer zweiten mit den Componenten:

11) $$-ny+mz, \quad -lz+nx, \quad -mx+ly$$

welche senkrecht auf der Richtung:

$$x : y : z = l : m : n$$

steht und vermöge welcher der Raum um diese Richtung mit der constanten Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

rotirt; die Geschwindigkeit 6) ist also componirt aus einer Dilatationsgeschwindigkeit in Bezug auf einen festen Punkt und aus einer Rotationsgeschwindigkeit um eine feste Axe [1]).

Analog besagen die Gleichungen 9), dass $\xi\eta\zeta$ bezüglich die Resultanten einer Translationsgeschwindigkeit des Raumes mit den Componenten $a$, $b$, $c$ und einer Rotationsgeschwindigkeit mit den Componenten 11) sind; sie involviren also eine sog. Euclidische Bewegung des Raumes [2]).

Im Folgenden bezeichnen wir die infinitesimale Transformation 6) kurz mit $T_1$, die infinitesimale Transformation 9) mit $T_2$

## § 4.

### *Die Normalformen der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes,*

Die Transformationen $T_1$ und $T_2$ des § 3. können noch weiter vereinfacht werden, indem man die Richtungen der Coordinatenaxen in bestimmter Weise wählt.

---

1) Vgl. Darboux. l. l. I, p. 107, Nr. 89, wo durch eine derartige kinematische Betrachtung die Spiralflächen eingeführt werden.

2) Vgl. Lie-Scheffers, li c. p. 15, § 4.

Bezeichnet zu diesem Zwecke wieder $(0x'y'z)$ ein Coordinatensystem, dessen Ursprung der invariante Punkt 0 der Transformation, dessen Axen aber mit den alten die Richtungscosini $(\alpha_i\beta_i\gamma_i) - i = 1, 2, 3$ — bilden, so gelten bekanntlich die Transformationsformeln:

1)
$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

In den neuen Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ sei das Symbol der infinitesimalen Transformation:

2)
$$Tf = \xi' \frac{\partial f}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial f}{\partial z'}$$

Dann ist [1]):

3)
$$\begin{aligned} \xi' &= Tx' = \xi\alpha' + \eta\beta' + \gamma_1\zeta \\ \eta' &= Ty' = \xi\alpha_2 + \eta\beta_2 + \zeta\gamma_2 \\ \zeta' &= Tz' = \xi\alpha_3 + \eta\beta_3 + \zeta\gamma_3 \end{aligned}$$

worin noch für $\xi\eta\zeta$ die Werte 6) bzhw. 9) des § 3. — aber ausgedruckt in $x'y'z'$ — zu setzen sind. Führt man zunächst die Substitution der Werte 6) des § 3. für $\xi\eta\zeta$ aus und ordnet nach $x$, $y$, $z$, so erhält man für 6):

4)
$$\begin{aligned} \xi' &= k(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + (n\beta_1 - m\gamma_1)x + (-n\alpha_1 + l\gamma_1)y + (m\alpha_1 - l\beta_1)z \\ \eta' &= k(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + (n\beta_2 - m\gamma_2)x + (-n\alpha_2 + l\gamma_2)y + (m\alpha_2 - l\beta_2)z \\ \zeta' &= k(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) + (n\beta_3 - m\gamma_3)x + (-n\alpha_3 + l\gamma_3)y + (m\alpha_3 - l\beta_3)z \end{aligned}$$

Nunmehr wähle man die Richtung $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ der neuen $z'$-Axe so, dass die Proportion gilt:

5)
$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = l : m : n$$

Setzt man dann zur Abkürzung:

6)
$$r = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

und beachtet, dass in der Determinante der 9 Richtungscosini die Subdeterminante jedes Elements gleich dem Element selbst ist, so folgt aus 4) und 5):

7)
$$\begin{aligned} \xi' &= k(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) - r(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) \\ \eta' &= k(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + r(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) \\ \zeta' &= k(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) \end{aligned}$$

oder aus 1) die neuen Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ eingeführt:

---

1) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I, p. 56, § 4.

8)
$$\begin{aligned}\xi' &= kx' - ry'\\ \eta' &= ky' + rx'\\ \zeta' &= kz'\end{aligned}$$

Analog erhält man aus 3) für die Werte 9) des § 3.:

8′)
$$\begin{aligned}\xi' &= a' - ry'\\ \eta' &= b' + rx'\\ \zeta' &= c'\end{aligned}$$

unter $a'$, $b'$, $c'$ neue Constanten (die Transformirten von $a$, $b$, $c$ auf das neue System, so dass z. B. $c' = (al + bm + cn)\frac{1}{k}$) verstanden. Verschiebt man noch für 8′) das Coordinatensystem $(0\,x'\,y'\,z')$ parallel mit sich selbst nach dem Punkt $\left(-\frac{b'}{r}, \frac{a'}{r}, 0\right)$ als neuen Ursprung, so erhält man schliesslich aus 8) und 8′) unter nachträglicher Weglassung der Accente die beiden Normalformen der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes [1]):

9)
$$\left.\begin{aligned}\xi &= kx - ry\\ \eta &= ky + rx\\ \zeta &= kz\end{aligned}\right\} \quad \text{bzhw.} \quad \left.\begin{aligned}\xi &= -ry\\ \eta &= rx\\ \zeta &= c\end{aligned}\right\}$$

die für das Folgende kurz mit $T_1'$ und $T_2'$ bezeichnet werden.

Für $r = 0$ erhält man aus $T_1'$ die infinitesimale Aehnlichkeitstransformation in Bezug auf den Ursprung, für $k = 0$ die infinitesimale Drehungstransformation um die $z$-Axe; aus diesen beiden Transformationen ist $T_1'$ linear zusammengesetzt und heisst deshalb die erweiterte Aehnlichkeitstransformation oder Spiraltransformation [2]).

Für $r = 0$ erhält man aus $T_2'$ die infinitesimale Verschiebungstransformation längs der $z$-Axe, für $c = 0$ die infinitesimale Drehungstransformation um dieselbe Axe; aus diesen beiden Transformationen ist also $T_2'$ linear componirt und heisst deshalb die infinitesimale Schraubentransformation des Raumes [3]).

1) Vgl. Staude. Leipz. Ber. 1893 vom 31. Juli, p. 522, (19) und (19′).

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. pag. 243, 4. Beisp.

3) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 214, § 1, Beisp.

§ 5.

*Die endliche Gruppe der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes.*

Um zu einer vorgelegten infinitesimalen Transformation $Tf$ die dazu gehörige Gruppe zu finden, hat man das simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen [1]):

$$1) \qquad \frac{dx}{\xi(xyz)} = \frac{dy}{\eta(xyz)} = \frac{dz}{\zeta(xyz)} = dt$$

zu integriren, unter $t$ den Parameter der Gruppe verstanden, mit den Anfangsbedingungen:

$$1') \qquad |\, x \,|_{t=0} = x_0, \quad |\, y \,|_{t=0} = y_0, \quad |\, z \,|_{t=0} = z_0$$

Für die Transformation $T_1'$ wird 1) nach § 4, 9):

$$2) \qquad \frac{dx}{kx - ry} = \frac{dy}{ky + r} = \frac{dz}{kz} = dt$$

Die erste dieser Gleichungen giebt das Integral:

$$3) \qquad \Omega_1 = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log \sqrt{x^2 + x^2} = \text{const.}$$

die zweite nach Combination mit der ersten:

$$4) \qquad \Omega_2 = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \log z = \text{const.}$$

Die dritte Gleichung 1) endlich ergiebt das Integral [2]):

$$5) \qquad W \equiv \frac{\log z}{k} = t + \text{const.}$$

Bestimmt man die Constanten aus den Bedingungen 1')' so werden die 3 Integrale von 2):

$$6) \quad k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log \sqrt{x^2 + y^2} = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y_0}{x_0} - r \log \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} - \log z = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \log z_0$$

$$\frac{\log z}{k} - t = \frac{\log z_0}{k}$$

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 215, § 2: Lie, l. c. I, p. 56 ff., § 16.

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c, p. 217.

Um diese 3 Gleichungen nach $x$, $y$, $z$ aufzulösen, führe man Polarkoordinaten ein durch die Gleichungen:

7) $$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

Die Gleichungen 6) werden dann:

8) $$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + rt \\ \varrho &= \varrho_0 e^{kt} \\ z &= z_0 e^{kt} \end{aligned}$$

so dass die Gleichungen der endlichen Gruppe von $T_1'$ nach 7) werden [1]):

8') $$\begin{aligned} x &= \varrho_0 e^{kt}\cos(\varphi_0 + rt) = e^{kt}(x_0\cos rt - y_0\sin rt) \\ y &= \varrho_0 e^{kt}\sin(\varphi_0 + rt) = e^{kt}(y_0\cos rt + x_0\sin rt) \\ z &= z_0 e^{kt} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen repräsentiren, wie speciell aus 8) ersichtlich, eine Transformation des Raumes, bei welcher jeder Raumpunkt um die $z$-Axe um den Winkel $rt$ gedreht wird und gleichzeitig an einer ähnlichen Dilatation des Raumes in Bezug auf den Ursprung in dem constanten Verhältnisse $e^{kt}$ teilnimmt; eine solche Transformation des Raumes soll kurz eine Spiralung, die Gruppe 8') also die Gruppe der Spiralung heissen.

Bildet man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1) für die Transformation $T_2'$, so erhält man in analoger Weise die Gleichungen der Gruppe der Schraubung des Raumes [2])

Um die Gleichungen 8') der Gruppe zu vereinfachen, führen wir statt der Cartesischen Coordinaten neue Coordinaten ein; als solche wählen wir die kanonischen Coordinaten der Gruppe [3]):

9) $$u \equiv \Omega_1 = k\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} - r\log\sqrt{x^2+y^2} = k\varphi - r\log\varrho$$

$$v \equiv \Omega_2 = \log\sqrt{x^2+y^2} - \log z = \log\varrho - \log z$$

$$w \equiv W = \frac{1}{k}\log z$$

1) Vgl. Darboux, l. c. I, p. 105, Formel (39),

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 219, Beispiel zu Satz 2.

3) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 228.

Die neuen Coordinatenflächen $u = \text{const.}$ sind dann Cylinderflächen mit der logarithmischen Spirale:

$$\varrho = c^{\frac{k}{r} \cdot \varphi} = \text{const.}$$

als Leitcurve und der $z$-Axe als Axe, die Flächen $v = \text{const.}$ Kreiskegel um die $z$-Axe mit dem Ursprung als Spitze, die Flächen $w = \text{const.}$ die Ebenen $z = \text{const.}$ Dabei bestehen zwischen Cartesischen und kanonischen Coordinaten die Relationen aus 9):

10)
$$x = e^{v+kw} \cos\left(\frac{u+rv}{k} + rw\right)$$
$$y = e^{v+kw} \sin\left(\frac{u+rv}{k} + rw\right)$$
$$z = e^{kw}$$

so dass das Linienelement des Raumes in den neuen Coordinaten wird [1]):

11)
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{2kw}\left\{\frac{e^{2v}}{k^2}[(k^2+r^2)(dv+kdw)^2 + 2r(dv+kdw)du + du^2] + k^2 dw^2\right\}$$

Die einfachere Gleichung der Gruppe 8') in $u$, $v$, $w$ ist dann unmittelbar in 6) gegeben.

Für die Gruppe der Schraubung werden die kanonischen Coordinaten:

12)
$$u = \log\sqrt{x^2+y^2} = \log\varrho, \quad v = \varphi - \frac{r}{c}z, \quad w = \frac{z}{c}$$

und das Linienelement des Raumes in denselben [1]):

13)
$$dz^2 = e^{2u}\{du^2 + (dv + rdw)^2\} + c^2 dw^2$$

Für die Specialfälle $k = 0$ bzhw. $c = 0$ und $r = 0$ fallen die kanonischen Coordinaten von $T_1'$ bzhw. $T_2'$ mit den gewöhnlichen Polarcoordinaten $\varrho$, $\varphi$, $z$ des Raumes zusammen.

---

1) Vgl. Staude. Leipz. Ber. 1893 p. 422, wo $u = v$, $v = u$, $m = k$, $n = -r$ zu setzen ist.

## § 6.

*Die invarianten Curven der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes.*

Die invarianten Curven einer infinitesimalen Transformation bestehen entweder aus lauter einzeln invarianten Punkten der Transformation oder aus den Bahncurven der durch die Transformation erzeugten endlichen Gruppe.

Für die Spiraltransformation $T_1'$ existiren invariante Curven der ersten Art nach § 3. nicht; die Bahncurven, d. i. der Ort der $\infty^1$ Punkte, in welche irgend ein Raumpunkt $(x_0 y_0 z_0)$ bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe der Spiralung übergeht, ergeben sich aus § 5., 8') durch Elimination von $t$ in der Form:

1) $$u \equiv k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

$$v \equiv \log \sqrt{x^2 + y^2} - \log z = \text{const.}$$

oder:

1') $$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^{\frac{2}{r}\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{x} - \text{const.}\right)} \\ x^2 + y^2 &= z^2 \,.\, \text{const.} \end{aligned}\right\}$$

wo die Constanten durch den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ gemäss § 5., 6) gegeben sind; erstere Gleichung stellt einen Cylinder um die $z$-Axe mit einer logarithmischen Spirale um 0 als Pol zur Leitcurve, letztere Gleichung einen geraden Kreiskegel um die $z$-Axe mit dem Ursprung 0 als Spitze dar. Die Bahncurven der Gruppe der Spiralung sind also die Schnittcurven von $\infty^1$ Spiralcylindern mit $\infty^1$ Kreiskegeln, die logarithmische Spiralen um 0 als Pol als Projectionen auf die $xy$-Ebene besitzen. Diese $\infty^2$ Bahncurven sollen doppelt gekrümmte Spirallinien heissen. In den Specialfällen $k = 0$ bzhw. $r = 0$ entarten sie zu Kreisen um die $z$-Axe bzhw. zu Geraden durch den Ursprung.

Für die Schraubentransformation existiren invariante Curven der ersten Art nur in dem Specialfalle $c = 0$; es sind alle Punkte der $z$-Axe als Axe der Rotation für die zugehörige Gruppe der Rotationen einzeln invariant. Die Bahncurven von $T_2'$ sind $\infty$ Schraubenlinien um die $z$-Axe von der Steighöhe $\frac{c}{r}$, die in den Specialfällen $c = 0$ bzhw. $r = 0$ zu Kreisen um die $z$-Axe bzhw. zu Geraden parallel der $z$-Axe entarten.

## § 7.

*Die invarianten Flächen der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes.*

Die invarianten Flächen einer infinitesimalen Transformation $Tf$ des Raumes bestehen entweder aus lauter einzeln invarianten Punkten, oder sie werden erzeugt von $\infty^1$ der $\infty^2$ Bahncurven der endlichen Gruppe; die allgemeine invariante Fläche der letzten Art hat dabei die Gleichung (1):

$$1) \qquad \Omega(u, v) = \text{const.}$$

unter $u$ und $v$ die kanonischen Coordinaten, d. i. nach § 5. 1) zwei unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $Tf = 0$, unter $\Omega$ eine beliebige Function verstanden.

Die Gleichung 1) wird für die infinitesimale Spiraltransformation $T_1'$ nach § 5, 9):

$$2) \qquad \Omega\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log \sqrt{x^2 + y^2},\quad \log \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \text{const.}$$

oder da auch jede Function von $u$ und $v$, z. B. $u + rv$ eine kanonische Coordinate der Gruppe ist:

$$2') \qquad \Omega\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log z,\quad \log \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \text{const.}$$

Führt man die Polarcoordinaten $\varrho\varphi z$ des Raumes ein, so ergiebt die Auflösung von 2) bzhw. 2') nach $k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = k\varphi$:

$$3) \qquad k\varphi = r \log \varrho + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)$$

bzhw.

$$3') \qquad k\varphi = r \log z + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)$$

unter $\psi$ eine beliebige Function des Arguments $\frac{\varrho}{z}$ verstanden.

Da die Bahncurven der Gruppe der Spiralung nach § 6. Spirallinien um die $z$-Axe mit dem Ursprung als Pol sind, besteht die

(1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 245 ff,

Fläche von den Gleichungen 2) bis 3) aus je $\infty^1$ dieser $\infty^2$ Spirallinien; sie soll deshalb eine allgemeine Spiralfläche — nach Analogie der Schraubenfläche, mit der sie die Eigenschaft gemein hat, eine Verschiebung in sich zu gestatten — genannt werden [1]). Man erhält diese Fläche, wenn man auf eine beliebige ebene Curve fortwährend eine infinitesimale Spiraltransformation ausgeführt denkt, d. h. nach § 5.: indem man die Ebene der Curve um die $z$-Axe dreht und die Curve sich gleichzeitig in Bezug auf den Ursprung so deformiren lässt, dass die Coordinaten $\varrho$ und $z$ jedes Curvenpunktes in geometrischer Progression mit dem Quotienten $e^k$ wachsen, während der Drehungswinkel der Curvenebene in arithmetischer Progression mit der Differenz $r$ zunimmt [2]). Dabei beschreibt jeder Curvenpunkt eine Spiralebene, so dass die Fläche in der Tat aus $\infty^1$ Spirallinien besteht (nämlich aus denjenigen Bahncurven der Gruppe, welche die gegebene Curve treffen).

Setzt man demnach in den Gleichungen 8') des § 5., welche die Bahncurve eines beliebigen Raumpunktes $(\varphi_0 \varrho_0 z_0)$ darstellen, wenn man $t$ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren lässt,

$$4) \qquad \varphi_0 = \varphi_0(u), \quad \varrho_0 = \varrho_0(u), \quad z_0 = z_0(u)$$

wo $\varphi_0(u)$, $\varrho(u)$, $z_0(u)$ beliebige reelle Functionen einer Variabeln $u$ sind, so erhält man die Bahncurven aller Punkte der beliebigen Curve [3]), d. h. die Gleichungen

$$5) \qquad \begin{aligned} x &= \varrho_0(u)\, e^{kv} \cos(\varphi_0(u) + rv) \\ y &= \varrho_0(u)\, e^{kv} \sin(\varphi_0(u) + rv) \\ z &= z_0(u)\, e^{kv} \end{aligned}$$

repräsentiren — mit $t = v$ — die Parameterdarstellung der allgemeinen Spiralfläche, wie sie zuerst von Herrn Darboux gegeben ist [3]). Die Coordinatencurven $u = \text{const.}$ sind dabei die $\infty^1$ Spirallinien, die Curven $v = \text{const.}$ die successiven Lagen der sich infolge $T_1'$ deformirenden Curve.

Eine andere sehr nützliche Form der Gleichungen 5) ergiebt sich, wenn man setzt:

---

1) Der Name „Spiralfläche" wurde zuerst von Herrn Lie 1878 im Norweg. Archiv eingeführt, vgl. Lie-Scheffers, l. l. p. 260, Anmerkg.

2) Vgl. M. Lévy, Compt. rend. 1878, t. 2 p. 789, wo die Flächen 3) „pseudo-neulures logarithmiques" genannt werden.

3) Vgl. Darboux, l. b. p. 110, wo die Flächen 5) „surfaces spirales" hesisen.

6) $$\varrho_0(u) = e^{p(u)}, \quad \varphi_0(u) = \frac{q(u) + r(p(u)}{k}$$

$$z_0(u) = e^{p(u)} \cdot f(u)$$

Dieselben werden dann:

7) $$x = e^{p(u)+kv} \cos \frac{q(u) + r(kv + p(u))}{k}$$

$$y = e^{p(u)+kv} \sin \frac{q(u) + r(kv + p(u))}{k}$$

$$z = e^{p(u)+kv} \cdot f(u)$$

welche Gleichungen sich auch direct aus 2) ableiten lassen, indem man diese Gleichung auf die Form gebracht denkt:

8) $$\log \sqrt{x^2 + y^2} = \log \frac{1}{f(k\varphi - r \log \varrho)}$$

dann $x$, $y$, $z$ durch $\varphi$ und $\varrho$ gemäss den Gleichungen

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = \varrho f(k\varphi - r \log \varrho)$$

ausdrückt und hierin die neuen Variabelen $u$ und $w = v$ des § 5., 9) einführt.

Eine dritte Parameterdarstellung der allgemeinen Spiralfläche, die zuerst von Herrn M. Lévy gegeben ist [1]), ergiebt sich aus 3′) in der Form:

9) $$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= k \end{aligned} \qquad \varphi = \frac{1}{k}\left\{ r \log z + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)\right\}$$

Ist speciell die Constante $k = 0$, so erhält man aus 2) als allgemeine Invariantenfläche der Gruppe der Rotationen um die $z$-Axe

10) $$\Omega(\sqrt{x^2 + y^2},\ z) = \text{const.}$$

d. i. die allgemeine Rotationsfläche um die $z$-Axe.

Ist speciell die Constante $r = 0$, so erhält man als allgemeine Invariantenfläche der Gruppe der Aehnlichkeit in Bezug auf den Ursprung:

1) Vgl. M. Lévy, l. c. p. 789 ff.

11) $$\Omega\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \text{const.}$$

d. i. — da nach 14) das Verhältniss

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{\varrho}{z}$$

nur eine Function von

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \varphi$$

ist, mithin für $\varphi = \text{const.}$ ebenfalls einen constanten Wert hat — eine Fläche, die aus lauter Geraden durch den Ursprung besteht, also eine allgemeine Kegelfläche mit dem Ursprung als Spitze.

Invariante Flächen der ersten Art existiren nach § 3. für $T_1^{\,0}$ nicht.

Analog erhält man für die infinitesimale Schraubentransformation $T_2'$ aus § 5., 13) die allgemeine Invariantenfläche:

12) $$\Omega\left(\sqrt{x^2+y^2}, \quad c \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - rz\right) = \text{const.}$$

d. i. eine aus $\infty^1$ der $\infty^2$ Schraubenlinien der Gruppe der Schraubung bestehende Fläche oder eine allgemeine Schraubenfläche mit der aus § 5. resultirenden Parameterdarstellung

12′) $$\begin{aligned} x &= \varrho_0(u)\cos(\varphi_0(u)+rv) \\ y &= \varrho_0(u)\sin(\varphi_0(u)+rv) \\ z &= z_0(u)+cv \end{aligned}$$

mit den Specialfällen der allgemeinen Rotationsfläche um die $z$ Axe ($c=0$) und der allgemeinen Cylinderfläche um dieselbe Axe ($x=0$). Invarianten der ersten Art existiren für $T_2'$ ebenfalls nicht.

Das Resultat der vorangehenden Entwickelungen lautet sonach in der Zusammenfassung:

I) „Die allgemeinsten invarianten Flächen der conformen „projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes „sind die allgemeinen Spiralflächen und die allgemeinen „Schraubenflächen mit den Specialfällen bezüglich der Kegel„flächen und der Cylinderflächen und dem gemeinsamen „Specialfalle der Rotationsflächen".

# Zweiter Abschnitt.

## Allgemeine Eigenschaften der Spiralflächen.

### § 8.

### *Das Linienelement der Spiralflächen.*

Das Linienelement der allgemeinen Spiralfläche hat eine charakteristische Form, die zunächst abgeleitet werden soll. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet die Parameterdarstellung des § 7., 5) der allgemeinen Spiralfläche:

1)
$$\begin{aligned} x &= \varrho_0(u)\, e^{kv} \cos(\varphi_0(u) + rv) \\ y &= \varphi_0(u)\, e^{kv} \sin(\varphi_0(u) + rv) \\ z &= z_0(u)\, e^{kv} \end{aligned}$$

Daraus folgt für das Quadrat des Linienelements der Fläche:

2)
$$ds^2 = e^{2kv}(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

wo gesetzt ist

2′)
$$\begin{aligned} E &= \varrho_0'^2(u) + \varrho_0^2(u)\,\varphi_0'^2(u) + z_0'^2(u) \\ F &= k\varrho_0(u)\,\varrho_0'(u) + r\varrho_0^2(u)\,\varphi_0'(u) + kz(u)\,z_0'(u) \\ G &= k^2\varrho_0^2(u) + r^2\varrho_0^2(u) + k^2 z_0^2(u) \end{aligned}$$

unter $\varrho_0'(u)$, $\varphi_0'(u)$, $z_0'(u)$ die Differentialquotienten von $\varrho_0(u)$, $\varphi_0(u)$, $z_0(u)$ verstanden; die Gauss'schen Fundamentalgrössen 1. Ordnung sind also allein Function von $u$. Zwecks Transformation von 2) bringen wir das Quadrat des Linienelements auf die Form:

3)
$$ds^2 = G(u)\, e^{2kv}\left\{\left(dv + \frac{F(u)}{G(u)}\,du\right)^2 + \frac{E(u)\,G(u) - F(u)^2}{G^2(u)}\,du^2\right\}$$

und setzen dann:

4)
$$dv + \frac{F(u)}{G(u)}\,du = dw$$

unter $w$ eine neue Variabele verstanden; die Integration von 4) ergiebt:

4′)
$$v = w - \int \frac{F(u)}{G(u)}\,du$$

Führt man diese neue Variabele $w$ in 3) ein, so folgt:

5)
$$dz^2 = e^{2kw}(H\,du^2 + \mathrm{H}\,dw^2$$

wo gesetzt ist:

5') $$H = \frac{E(u)\,G(u) - F_2{}^2(u)}{C(u)\,.\,e^{-2k\int \frac{F(u)}{G(u)}du}} = H(u)$$

$$\mathrm{H} = G(u)\,.\,e^{-2k\int \frac{F(u)}{G(u)}du} = \mathrm{H}(u)$$

Da $H$ und H also blosse Functionen von $u$ sind, kann man statt $u$ eine neue Variabele $\mu$ einführen durch die Gleichung:

6) $$H(u)\,du^2 = d\mu^2$$

aus welcher umgekehrt durch eine blosse Quadratur $u$ als eine Function $m^2(\mu)$ von $\mu$ folgt. Man erhält aus 5):

7) $$ds^2 = e^{2kw}(d\mu^2 + M^2 d\omega^2)$$

wo $M$ die Function $\mathrm{H}(m^2(\eta))$ darstellt [1]). Führt man schliesslich statt $\mu$ die neue Variabele $\nu$ ein durch die Relation:

8) $$\frac{d\mu^2}{M^2(\mu)} = d\nu, \quad \text{i. e.} \quad \nu = \int \frac{d\mu}{M(\mu)}$$

so kann man daraus $\mu$ als Function $N(\nu)$ mittelst Ausführung einer blossen Quadratur darstellen, und erhält aus 7):

9) $$ds^2 = e^{2kw}\,.\,N^2(\nu)(d\nu^2 + d\omega^2)$$

oder $N^2(\nu) = e^{2g(\nu)}$ und $\nu$ wieder $= u$ sowie $w = v$ gesetzt:

10) $$ds^2 = e^{2kw+2g(u)}\,.\,(du^2 + dv^2)$$

Aus der Form 10) des Linienelements, die die gesuchte charakteristische Form des Linienelements der allgemeinen Spiralfläche 1) repräsentirt, folgt dass die neuen Coordinaten $u$ und $v$ isometrische Coordinaten der Fläche 1) sind, und zwar sind die Curven $u = \text{const.}$ nach 6) und 8) identisch mit den Bahncurven der Spiralung, also Spirallinien, während die Curven $v = \text{const.}$ die orthogonalen Trajectorien von $u = \text{const}$ sind.

Zu der Form 10) des Linienelements gelangt man auch, wenn man ausgeht von der modificirten Parameterdarstellung der allgemeinen Spiralfläche:

11) $$x = e^{p(u)+kv}\cos\frac{q(u)+r(kv+p(u))}{k}$$

1) Vgl. Darboux, l. c. p. 109 und 110.

11) $$y = e^{p(u)+kv} \sin \frac{q(u)+r(kv+p(u))}{k}$$

$$z = e^{p(u)+kv} \cdot f(u)$$

Man erhält daraus für das Quadrat des Linienelements:

12) $$ds^2 = e^{2p(u)+2kv}(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

wo gesetzt ist:

12') $$E = \left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)p'^2(u)+2\left(\frac{r}{k^2}q'(u)+f(u)\cdot f'(u)\right) \times p'(u)+\left(\frac{q'^2(u)}{k^2}+f'^2(u)\right)$$

$$F = k\left\{\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)p'(u)+\left(\frac{r}{k^2}q'(u)+f(u)\cdot f'(u)\right)\right\}$$

$$G = k^2\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)$$

Damit nun 12) die gesuchte charakteristische Form 10) erhält, müssen die willkürlichen Functionen $p(u)$, $q(u)$, $f(u)$ so bestimmt werden, dass man hat:

13) $$\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)p'(u)+\frac{r}{k^2}q'(u)+f(u)\cdot f'(u)=0$$

$$\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)p'^2(u)+2\left(\frac{r}{k^2}q'(u)+f(u)\cdot f'(u)\right)p'(u)+\frac{q'^2(u)}{k^2} + f'^2(u) = k^2\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)$$

wo die Striche immer die Differentiation nach $u$ andeuten.

Aus diesen Gleichungen lassen sich 2 der willkürlichen Functionen, z. B. $p(u)$ und $q(u)$ durch die dritte $f(u)$ und die beiden Constanten $k$ und $r$ ausdrücken; eliminirt man nämlich aus der ersten Gleichung $q'$ und subtrahirt den gefundenen Wert in die zweite, so erhält man für $p'$ die quadratische Gleichung:

14) $$(1+f^2)p'^2+2ff'p'+\frac{f'^2}{1+\frac{r^2}{k^2}+f^2}\left(f^2+\frac{r^2}{k^2}\right)-r^2=0$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{r}{k}=\varkappa$, so folgt aus 14):

15) $$\frac{dp(u)}{du} = p'(u) = -\frac{ff'}{1+f^2} \pm \frac{\varkappa}{1+f^2}\sqrt{k^2(1+f^2) - \frac{f'^2}{1+\varkappa^2+f^2}}$$

woraus sich $p(u)$ mittelst einer blossen Quadratur bestimmen lässt, da $f$ und $f'$ allein Functionen von $u$ sind. Durch eine nochmalige Quadratur ergiebt sich dann $q(u)$ aus:

16) $$\frac{dq(u)}{du} = q'(u) = -\frac{k^2}{r}\left[ff' + (1+\varkappa^2+f^2)p'\right]$$

Die Form 12) lässt sich sonach infolge der Willkürlichkeit von $f(u)$ bei gegebenen Constanten $k$ und $r$ auf einfach unendlich viele Arten transformiren in

17) $$\begin{aligned} ds^2 &= E(u)\, e^{2p(u)\, 2kv}\,(du^2 + dv^2) \\ &= e^{2q(u)+2kv}\,(du^2 + dv^2) \end{aligned}$$

d. i. auf die charakteristische Form 10) bringen.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass man auch von der Lévy'schen Gleichungsform der allgemeinen Spiralfläche in § 7., 9)

18) $$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\frac{1}{k}\left(r\log z + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)\right) \\ y &= \varrho\sin\frac{1}{k}\left(r\log z + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

ausgehend zu der charakteristischen Form 10) des Linienelementes der Fläche gelangt. Setzt man zur Abkürzung:

19) $$\frac{\varrho}{z} = u, \quad \text{i. e.} \quad d\varrho = z\,du + \mu\,dz$$

so folgt aus 18) für das Quadrat des Linienelements [1]):

20) $$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1+\frac{u^2\psi'^2}{k^2}\right)d\varrho^2 + 2\frac{u^2}{k^2}\psi'(r-u\psi')\,d\varrho\,dz \\ &\qquad + \left[1+(r-\psi' u)^2\right]\frac{u^2}{k^2}dz^2 \\ &= A\,du^2 + 2M\,du\,dz + N\,dz^2 \end{aligned}$$

wo gesetzt ist

---

1) Vgl. Lévy, l. c. p. 790, (2).

20′ $$A = z^2\left(1+\frac{u^2\psi'^2}{k^2}\right)$$

$$M = \frac{zu}{k^2}(k^2+ru\psi')$$

$$N = \frac{u^2}{k^2}(1+k^2+r^2)$$

Um den Coefficienten $M$ fortzuschaffen, führen wir eine neue Variabele $v$ statt $z$ ein durch die Gleichung:

21) $$z = f(u, v)$$

wo f eine noch zu bestimmende Function bezeichnet; die Gleichung 20) wird dann:

22) $$ds^2 = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

wo gesetzt ist:

22′) $$E = \frac{u^2}{k^2}[f_1{}^2+(f\psi'+f_1r)^2+(f+f_1u)^2]$$

$$F = \frac{u^2}{k^2}a^2f_1f_2+\frac{u}{k^2}ff_2(k^2+ru\psi')$$

$$G = \frac{u^2}{k^2}a^2f_2{}^2$$

unter $a^2$ die Constante $1+k^2+r^2$, unter $f_1$ und $f_2$ die partiellen Differentialquotienten von $f$ nach $u$ und $v$ verstanden. Die Function $f$ in 21) werde nun so bestimmt, dass:

23) $$F = 0$$

die Curven $u =$ const. und $v =$ const. also orthogonal sind; man erhält dann nach 22′):

24) $$\frac{f_1}{f} = \frac{\partial \log f}{\partial u} = \frac{-k^2-ru\psi'}{a^2u}$$

woraus durch Integration folgt:

25) $$\log f(u, v) = -\frac{k^2}{a^2}\log u-\frac{r}{a^2}\psi(u)+\frac{\chi(v)}{a}$$

unter $\chi(v)$ eine Integralfunction verstanden. Die quadratische Differentialform 22) wird damit:

$$26)\qquad ds^2 = \frac{n^2}{k^2} \cdot f^2 (M\,du^2 + N dv^2)$$

wo gesetzt ist:

$$26')\qquad M = \frac{f_1^2}{f^2} + \left(\psi' + \frac{f_1}{f} r\right)^2 + \left(1 + \frac{f_1}{f} u\right)^2 = M(u)$$

$$N = \frac{f_2^2}{f^2} a^2 = \chi'^2(v)$$

Da $M$ und $N$ allein von $u$ bzhw. von $v$ abhangen, kann man setzen:

$$27)\qquad \begin{aligned} M(u)\,du^2 &= d\mu^2 \\ N(v)\,dv^2 &= d\nu^2 \end{aligned}$$

woraus sich $u$ und $v$ als Functionen der neuen isometrischen Coordinaten $\mu$ und $\nu$ mittelst blosser Quadraturen bestimmen. Die Form 27) wird damit gemäss dem Werte 25) von $f$:

$$28)\qquad \begin{aligned} ds^2 &= \frac{n^2}{k^2} e^{-2\frac{k^2}{a^2}\log u - 2r\frac{\psi(u)}{a^2} + 2\frac{\chi(v)}{a}} (d\mu^2 + d\nu^2) \\ &= e^{2\varphi(u) + 2\,\mathrm{const.}\,r} (d\mu^2 + d\nu^2) \end{aligned}$$

d. i. wieder die charakteristische Form 10) in geänderter Bezeichnung: $u = \mu$, $v = \nu$ der Variabelen.

Führt man statt der isometrischen Coordinaten $u$ und $v$ die symmetrischen Coordinaten $x$ und $y$ ein vermöge der Substitution:

$$29)\qquad x = u + iv, \quad y = u - iv$$

so geht die charakteristische Form des Linienelements der Spiralflächen über in die zuerst von Herrn Lie gegebene Form [1]):

$$30)\qquad \begin{aligned} ds^2 &= e^{\frac{k}{i}(x-y) + \varphi(x+y)}\, dx\, dy \\ &= e^{2k\frac{i}{k} + \left(\frac{k}{i}(x+y) + \varphi(x+y)\right)}\, dx\, dy \\ &= e^{\varphi(x+y)} \cdot \Phi(x+y) \cdot dx\, dy \end{aligned}$$

---

1) Vgl. Lie, Mathem. Annalen, Bd. XX, p. 368. § 2.; die daselbst behandelte 1. Flächenclasse umfasst also die Spiralflächen und die auf sie abwickelbaren Flächen.

Ist speciell $k = 0$, so erhält man die bekannte Form des Linienelements der Rotationsflächen

31) $$ds^2 = e^{2\varphi(u)} \cdot (du^2 + dv^2)$$
$$= m^2(u) \cdot (du^2 + dv^2)$$

## § 9.

*Das Linienelement der auf Spiralflächen abwickelbaren Flächen.*

Nach § 8. hat das Quadrat des Linienelements der Spiralflächen die Form:

1) $$ds^2 = e^{2\varphi(u)+2kv}(du^2 + dv^2)$$

Nach dem Begriff der Abwickelbarkeit kommt diese Form auch jeder Fläche zu, die auf eine Spiralfläche abgewickelt werden kann. Umgekehrt lässt sich aber auch zeigen, dass jede Fläche, die die Form 1) des Linienelements besitzt — unter $k$ eine Constante, unter $\varphi(u) = \varphi_0(u)$ eine gegebene Function von $u$ verstanden —, auf eine Spiralfläche abwickelbar ist. Denn nach § 8. lassen sich die arbiträren Functionen $p(u)$, $q(u)$, $f(u)$ einer allgemeinen Spiralfläche:

2) $$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi \\ z &= \varrho f(u) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \varrho &= e^{p(u)+kv} \\ \varphi &= \frac{q(u)+r(kv+p)}{k} \end{aligned}$$

stets so bestimmen, dass das Linienelement von 2) die Form erhält:

3) $$ds^2 = e^{2\varphi(u)+2kv}(du^2 + dv^2)$$

unter $\varphi(u)$ jetzt aber eine Function der 3 Grössen $f(u)$, $k$, $r$ verstanden; man hat dazu nur die in § 8., 15) und 16) gegebenen Werte von $p(u)$ und $S(u)$ zu wählen. Da diese aber ausser $k$ und $r$ noch die arbiträre Function $f(u)$ enthalten, so hat man letztere nur so zu bestimmen, dass $\varphi(u)$ in 3) den gegebenen Wert $\varphi_0(u)$ erhält, was auf die Gleichung führt (vergl. § 8., 12′) und 17)):

4) $$k^2\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f'^2(u)\right)e^{2p(u)} = e^{2\varphi_0(u)}$$

wo für $p(u)$ sein Wert aus § 8., 15) zu setzen ist. Hat man aus 4) $f(u)$ gefunden, also damit auch $p(u)$ und $q(u)$, bei dem gegebenen Wert von $k$ und beliebigem $r$, so ist dadurch eine Spiralfläche 2) gegeben, die auf die Fläche 1) abgewickelt werden kann, da sie dieselbe Form des Linienelements hat. Mithin kann auch vice versa die Fläche 1) auf eine Spiralfläche 2) abgewickelt werden, q. e. d.

Da in 4) die Constante $r$ noch willkürlich war, giebt es einfach unendlich viele Spiralflächen 2), die auf die vorgelegte Fläche 1), mithin auch auf einander abwickelbar sind [1]). Für den Specialfall $k = 0$ reducirt sich dieser Satz auf das bekannte Theorem von Bour, wonach es 2fach unendlich viele Schraubenflächen giebt, die auf eine vorgelegte Rotationsfläche abwickelbar sind.

## § 10.

*Curven auf den Spiralflächen.*

Unter den Curven auf einer Fläche sind von besonderem Interesse die Haupttangentencurven, Krümmungscurven und die geodätischen Linien. Beschäftigen wir uns kurz mit diesen Curven auf den Spiralflächen und den auf dieselben abwickelbaren Flächen.

Was zunächst die Haupttangenten- und Krümmungscurven dieser Flächen anlangt, so hat Lie allgemein gezeigt, dass die Haupttangenten- und Krümmungscurven jeder Fläche, die eine conforme und lineare infinitesimale Transformation gestattet, durch Quadraturen gefunden werden können [2]). Eine solche Fläche ist nun die allgemeine Spiralfläche, die sich als invariante Fläche der conformen projectiven infinitesimalen Transformation allen derartigen Anforderungen genügt, d. h. durch eine infinitesimale Spiraltransformation des Raumes in sich übergeht: dasselbe gilt auch von den allgemeinen Schraubenflächen, die die infinitesimale Schraubentransformation des Raumes gestatten, und den bezüglichen Spiralfällen der Rotations-, Kegel- und Cylinderflächen. Die Haupttangentencurven und die Krümmungscurven aller dieser Flächen können mithin durch Quadraturen gefunden werden [3]).

Was weiter die geodätischen Linien einer Fläche mit einer infinitesimalen Transformation anlangt, so hat Lie ebenfalls gezeigt, dass die geodätischen Linien einer solchen Fläche zu ihrer Bestimmung nur die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung, alsdann nur noch eine Quadratur erfordern [4]). Bildet man in der Tat die Differentialgleichung der geodätischen Linien der Spiralflächen aus der bekannten Eigenschaft der geodätischen Linien:

---

1) Vgl. Lévy, l. c. p. 790, wo das Linienelement der „pseudo-moulures“ logarithmiques“ in der Form: $Adx^2 + 2Bdx\,dy + Cdy^2$ vorausgesetzt wird, unter $A$, $B$, $C$ homogene Functionen vom Grade 0 in $x$ und $y$ verstanden.

2) Vgl. Lie, Mathem. Ann. Bd. IV, p. 84, Bd. V, p. 204 ff.

3) Vgl. Lie-Scheffers, l. c, p. 260 und 261.

4) Vgl. Lie, Mathem. Ann. Rd. V, p. 204, Bd. XV, p. 438.

1) $$\delta \int ds = \delta \int e^{\varphi(u)+kv} \,.\, \sqrt{1+u'^2}\, du = 0$$

unter $u$ die unabhängige Variabele verstanden, so erhält man

2) $$\frac{dv'}{du} = (1+v'^2)\,(k+\varphi'(u)\,.\,v')$$

mit

2′) $$v' = \frac{dv}{du}, \quad \varphi'(u) = \frac{d\varphi(u)}{du}$$

welche Differentialgleichung in $u$ und $v'$ eine Differentialgleichung erster Ordnung ist. Darboux hat gezeigt, dass diese Differentialgleichung 1. Ordnung, die für den Spiralfall $k = 0$ der Rotationsflächen sofort auf eine Quadratur zurückführbar ist, in dem allgemeinen Falle auf eine Riccati'sche Differentialgleichung reducirt werden kann [1]; dasselbe gilt auch von der Differentialgleichung der geodätischen Linien einer jeden Fläche, der dasselbe Linienelement zukommt, wie den Spiralflächen, d. h. von allen auf Spiralflächen abwickelbaren Flächen. Hat das Integral der Riccati'schen Differentialgleichung dann etwa die Form:

3) $$f(u, v') = \text{const.}$$

so hat man nur noch eine Differentialgleichung 1. Ordnung in $u$ und $v$, von welcher im Falle der Spiralflächen bekannt ist, dass ihre Integralcurven eine Transformation — eben die Spiraltransformation des Raumes — gestatten; nach einem Fundamentaltheorem von Lie [2] ist 3) folglich durch eine Quadratur integrirbar.

## § 11.

*Zusammenfassung des Entwickelten.*

Die Betrachtungen dieses Abschnittes lassen sich in den Satz zusammenfassen:

II) „Das Linienelement der Spiralflächen und der auf diese „Flächen abwickelbaren Flächen lässt sich stets auf die „Formel bringen:

$$ds^2 = c^{2\varphi(u)+2kv}\,(du^2+dv^2)$$

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 260, 373, Anm.

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 97, Theorem 8.

„unter $k$ eine Constante, unter $\varphi(u)$ eine willkürliche Func-
„tion von $u$ verstanden, und vice versa lässt sich jede
„Fläche mit derartiger Form des Linienelements auf jede
„von $\infty^1$ Spiralflächen abwickeln, so dass die obige Form
„des Linienelements für eine gewisse Flächenclasse cha-
„rakteristisch ist. Dabei sind die isometrischen Coordi-
„natencurven $u =$ const. Spirallinien, $v =$ const. orthogonale
„Trajectorien mit logarithmischen Spiralen als Projection
„auf eine Coordinatenebene."

„Die Haupttangenten- und Krümmungscurven der Spiral-
„flächen lassen sich durch Quadraturen; die geodätischen
„Linien der ganzen Flächenclasse durch Integration einer
„Riccati'schen Differentialgleichung bestimmen."

## Dritter Abschnitt.

### Die Theorie der Bewegung eines Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction auf Oberflächen und die Spiralflächen.

### § 12.

*Bedingungen einer infinitesimalen Transformation für die Bahncurven eines Punktes auf Oberflächen unter Einfluss einer Kräftefunction.*

Die durch die Spiralfläche gekennzeichnete Flächenclasse steht in einer interessanten Beziehung zu der Theorie der Bewegung eines Punktes auf Oberflächen unter Einfluss einer Kräftefunction [1]).

Auf einer Oberfläche sei irgend ein Coordinatensystem $u$, $v$ fixirt, in welchem das Quadrat des Linienelements sei:

$$1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

Die Kräftefunction sei

$$2) \qquad U = U(u, v)$$

Dann giebt das Princip von Hamilton die Differentialgleichung der Bahncurven eines bewegten Punktes auf der Fläche in der Form:

$$3) \qquad v'' = \omega(u, v, v')$$

unter $u$ etwa die unabhängige Variabele verstanden, die Accente bezeichnen dann die Differentiation nach $u$.

1) Vgl. Staude, Leipz. Ber. 1892 vom 17. October, p. 429 ff.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $\infty^2$ Integralcurven der Differentialgleichung 2ter Ordnung sub 3) eine infinitesimale Transformation:

$$4) \qquad Tf = \xi(u, v)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta\frac{\partial f}{\partial v}$$

zulassen, unter $\xi$ und $\eta$ Functionen von $u, v$ verstanden, lautet dann nach Lie [1]):

$$5) \qquad \xi\frac{\partial w}{\partial u} + \eta\frac{\partial w}{\partial v} + \eta'\frac{\partial w}{\partial v'} - \eta'' = 0$$

mit der Abkürzung:

$$b') \qquad \eta' = \eta_1 + (\eta_2 - \xi_1)v' - \xi_2 v'^2$$
$$\eta'' = \eta_{11} + (2\eta_{12} - \xi_u)v' + (\eta_{22} - 2\xi_{12})v'^2 - \xi_u v'^3 + (\eta_2 2\xi_1 - 3\xi_2 v')v''$$

welche Gleichung vermöge 3) identisch in $u, v, v'$ bestehen muss; man erhält so die identische Gleichung:

$$6) \qquad \xi\frac{\partial w}{\partial u} + \eta\frac{\partial w}{\partial v} + \eta'\frac{\partial w}{\partial v'} - \eta_{11} - (2\eta_{12} - \xi_{11})v' - (\eta_{22} - 2\xi_{12})v'^2 + \xi_{22}v'^3 - (\eta_2 - 2\xi_1 - 3\xi_2 v')w = 0$$

Dieselbe vereinfacht sich, wenn man für die willkürlichen Coordinaten $u, v$ die kanonischen Coordinaten $u, v$ von 4) einführt. Dann wird in den neuen Coordinaten [2]):

$$7) \qquad \xi = 0, \quad \eta = 1, \quad Tf = \frac{\partial f}{\partial v}$$

und die Gleichung 6) reducirt sich auf

$$8) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0$$

wo für $\omega$ sein Wert aus 3) zu setzen wäre.

Wir verlangen nun, dass die neuen Coordinaten ebenso wie die alten isometrische Coordinaten der Fläche sind, um die folgenden Betrachtungen zu vereinfachen. Dann werden die Gleichungen 1) und 3) bezüglich:

$$9) \qquad ds^2 = E(u, v)(du^2 + dv^2)$$

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 362, Theor. 34.

2) Vgl. Lie, l. c. I, p. 56, § 14; Lie-Scheffers, l. c. p. 225, Theor, 15.

10) $$v'' = (1+v'^2)(p_2 - p_1 v') \equiv \omega(u, v, v')$$

wo gesetzt ist ($h$ als Integrationsconstante gebraucht)

10′) $$p = \tfrac{1}{2}\log E + \tfrac{1}{2}\log(U+h)$$

und die Indices 1, 2 die partielle Differentiation nach $u$ und $v$ bezeichnen. Die identische Gleichung 8) gilt in den neuen Variabeln $u$, $v$, wo $u =$ const. die Integralcurven der Differentialgleichung der Bahncurven von 4)

11) $$\xi dv - \eta du = 0$$

repräsentirt; damit nun die zweite kanonische Coordinate $v$ mit der kanonischen Coordinate $u$ ein orthogonales System bildet, ist notwendig und hinreichend, dass $v =$ const. Integralcurven der Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorie von 11):

11′) $$\xi du + \eta dv = 0$$

darstellt; damit ferner in den neuen Coordinaten

12) $$ds^2 = E(u, v)(du^2 + dv^2)$$

wird, ist notwendig und hinreichend, dass die Differentialgleichungen 11) und 11′) denselben Multiplicator besitzen [1]); die Differentialgleichung des Multiplicators ergiebt als Bedingung dafür:

13) $$\xi_1 - \eta_2 = 0, \quad \xi_2 + \eta_1 = 0$$

welches nach § 2. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass die Transformation[1]) in den alten Coordinaten conform ist.

Man kann somit in den neuen Coordinaten auch setzen:

14) $$\pi = \tfrac{1}{2}\log E + \tfrac{1}{2}\log(U+h)$$

und die identische Gleichung 8) wird gemäss 10):

15) $$\pi_{22} - \pi_{12} \cdot v' = 0$$

d. i. nach 14):

15) $$w_{12} = 0, \quad w_{22} = 0$$
$$U_{12} = 0, \quad U_2 = 0$$

wenn zur Abkürzung

16) $$w = \log E$$

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 156, § 2.

gesetzt ist, und wenn verlangt wird, dass die Gleichung 15) nicht nur identisch in $u$, $v$, $v'$, sondern auch identisch in $h$ gelten soll, unter $h$ die Integrationsconstante des Integrals der lebendigen Kraft verstanden, d. h wenn die $\infty^2$ Bahncurven unseres bewegten Punktes unabhängig von $h$ die infinitesimale Transformation 7) gestatten.

Aus 15′) folgt

17) $$w = 2av + 2\varphi(u), \quad U = \psi(u)$$

unter $2a$ eine Integrationsconstante, unter $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ beliebige Functionen von $u$ verstanden.

Sollen also die $\infty^2$ Bahncurven des bewegten Punktes unabhängig von $h$ eine infinitesimale Transformation gestatten, so ist dazu nach 12), 16) und 17) notwendig und hinreichend, dass auf der Fläche ein isometrisches Coordinatensystem $u$, $v$ existirt, in welchen das Quadrat des Linienelements die Form annimmt:

18) $$ds^2 = e^{2\varphi(u)+2av}(du^2 + dv^2).$$

während die Kräftefunction zugleich die Form

18′) $$U = U(u)$$

haben muss. Das Symbol der infinitesimalen Transformation wird in diesem System:

$$Tf = \frac{\partial f}{\partial v}$$

so dass die Bahncurven $u =$ const der Transformatio zusammenfallen mit den Niveaulinien $U =$ const.

Für $U =$ const. überhaupt erhält man in 18) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $\infty^2$ geodätischen Linien einer Fläche eine conforme infinitesimale Transformation gestatten [1]).

## § 13.

### *Folgerungen für die Spiralflächen.*

Im zweiten Abschnitt war gezeigt worden, dass die einzigen Flächen, deren Linienelemente die Form zukommt:

1) $$ds^2 = e^{2\varphi(u)+2av}(du^2 + dv^2)$$

die Spiralflächen und die auf sie abwickelbaren Flächen sind.

---

1) Vgl. Lie, Untersuchungen über geodätische Curven, Mathem. Annalen Bd. XX. p. 370. Satz 5 in § 2, wo nur statt isometrischer Coordinaten symmetrische Coordinaten angewandt sind.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen bildet aber 1) in Verbindung mit der Gleichung:

$$U = U(u)$$

für die Kräftefunction die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $\infty^2$ Bahncurven eines bewegten Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction jederzeit eine infinitesimale Transformation gestatten.

Die notwendige Bedingung für eine derartige Eigenschaft der Bahncurven eines bewegten Punktes auf einer Fläche unter Einfluss einer Kräftefunction ist also die, dass die Fläche zu der durch die Spiralflächen gekennzeichneten allgemeinen Flächenclasse gehört. Da ferner für die Spiralflächen die Coordinatencurven $u = \text{const.}$ nach § 8. Spirallinien sind, die gleichen Curven aber nach § 12. die Bahncurven derjenigen infinitesimalen Transformation sind, welche die $\infty^2$ Bahncurven des bewegten Punktes zulassen, so erhält man als derartige infinitesimale Transformation für die Spiralflächen die Spiraltransformation oder allgemeiner die conforme projective infinitesimale Transformation des Raumes, wie aus der Invarianz der Spiralflächen für eben diese infinitesimale Transformation vorherzusehen war; die Niveaulinien der Kräftefunction auf der Fläche müssen dann ebenfalls Spirallinien sein.

Ein einfaches Beispiel der Bewegung eines Punktes auf Oberflächen, wo die Bedingungen des § 12. erfüllt sind, ist die Bewegung eines Punktes auf einer Oberfläche, die durch Rotation irgend einer Curve um die $z$-Axe entsteht, unter Einfluss der Schwerkraft; die infinitesimale Transformation ist dann die infinitesimale Drehungstransformation um die $z$-Axe, ein specieller Fall der allgemeinen conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes; die Niveaulinien der Kräftefunction sind dann Parallelkreise um die Axe der Rotation.

Wie aber in dem angeführten Beispiele jede Niveaulinie bekanntlich Umhüllungscurve eines Systems von $\infty^1$ Bahncurven des bewegten Punktes sein kann [1]), so gilt auch allgemein der Satz, dass jede Niveaucurve des § 12. Umhüllungscurve eines Systems von $\infty^1$ Bahncurven des bewegten Punktes sein kann, dass also im Falle der Spiralflächen die Spirallinien selbst Umhüllungscurven von $\infty$ Bahncurven des bewegten Punktes sind.

---

1) Vgl. Pund, Ueber bedingt-periodische Bewegungen eines materiellen Punktes auf Oberflächen 2. Ordnung etc. Diss. 1893, § 2 und § 1 des ersten bzhw. zweiten Abschn.

Wie ferner in demselben Beispiel auch Bewegung auf einem Parallelkreis stattfinden kann, so gilt auch allgemein der Satz, dass jede Niveaucurve des § 12. im allgemeinen bei geeignetem Wert von $h$ Bahncurve des Punktes sein kann, dass also im Falle der Spiralflächen die Spirallinien selbst Bahncurven des bewegten Punktes sein können.

Diese beiden Sätze sind von Herrn Staude des Näheren bewiesen worden [1]).

## § 14.

*Zusammenfassung.*

Wir fassen das Resultat unserer Entwicklungen in den Satz zusammen:

III) Die durch die Spiralflächen charakterisirte Flächenclasse ist die einzige, auf welcher die $\infty^2$ Bahncurven eines bewegten Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction eine infinitesimale Transformation gestatten; die Kräftefunction selbst muss dabei die Form haben:

$$U = U(u)$$

unter $u$ und $v$ die isometrischen Coordinaten der Fläche verstanden".

---

1) Vgl. Staude, Leipz. Ber. 1892 vom 17 Octbr. p. 438 fl. §§ 4, 5.

# Berichtigungen.

S. 4, Z. 9 v. u. lies „$\delta a_{21} x$“ statt „$\delta a_{22} x$“

S. 6, Z. 9 v. o. lies „$G(\varphi\psi\chi)\chi_1{}^{2}$“ statt „$G(\varphi\psi\chi) \times x_1{}^{2}$“

S. 7, Z. 10 u. 13 v. u. lies „$\eta_3 + \zeta_1$“ statt „$\eta_1 + \zeta_2$“ u. $\eta_3 + \xi_2$“

S. 7, Z. 3 v. u. lies „$-n$“ statt „$-u$“

S. 8, Z. 4 v. o. lies „$\xi \frac{\partial f}{\partial x}$“ statt „$\frac{\partial f}{\partial x}$“

S. 12 Z. v. o. lies „$\frac{1}{r}$“ statt „$\frac{1}{k}$“

S. 13, Z. 2 v. u. lies „$\log \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2} - \log z_1$“ statt „$\log \sqrt{x^2+y^2} - \log z_0$“

S. 17, Z. 14 v. o. lies „$\log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$“ statt „$\log \sqrt{\frac{x^2+y^2}{z}}$“

S. 20, Z. 4 u. Z. 21 v. o. lies „$T_1{}'$“ und „$r = 0$“ statt „$T_1{}^0$“ und „$x = 0$“

S. 21, Z. 2 v. u. lies „$du^2$“ statt „$au^2$“

S. 22, Z. 2 v. o. lies „$G(u)$“ statt „$C(u)$“ u, weiter „$d\omega$“ statt „$d\omega$“

S. 23, Z. 6 v. o. u. Z 4 v. u. lies „$\frac{r^2}{k^2}$“ u. substituirt“ statt „$\frac{z^2}{k^2}$“ u. „subtrahirt“

S. 28, Z. 1 v o. lies „zweifach“ statt „einfach“

S. 26, Z. 1 v. u lies „$x + y$“ statt „$y + y$“

S. 29, Z. 8 v. o. lies „Spezialfall“ statt „Spiralfall“

S. 31, Z. 10 u. 11 v. o. lies „$\xi_{11}$“ u. „$\xi_{22} v'^3$“ statt „$\xi u$“ u. „$\xi u v'^3$“